范德蒙德行列式在高等代数中的应用

福州大学　　叶从峰

2023.12.17

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_{n-1}^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(x_i - x_j)$$

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 两两不同时，矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

可逆。

设 $f_k(x)=x^k+a_{k1}x^{k-1}+a_{k2}x^{k-2}+\cdots+a_{kk}$（$k=1,2,\cdots,n-1$），求

$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

分析：将原行列式写为：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1+a_{11} & x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & \cdots & x_1^{n-1}+a_{21}x_1^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ 1 & x_2+a_{11} & x_2^2+a_{21}x_2+a_{22} & \cdots & x_2^{n-1}+a_{21}x_2^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n+a_{11} & x_n^2+a_{21}x_n+a_{22} & \cdots & x_n^{n-1}+a_{21}x_n^{n-2}+\cdots+a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

证明：设 $f(x),g(x)\in F[x]$，$\deg f(x)\le n$ 且 $\deg g(x)\le n$，若存在 F 上个 $n+1$

不同数 $b_1,b_2,\cdots,b_{n+1}$，使

$$f(b_i)=g(b_i)\quad（i=1,2,\cdots,n+1），$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 作为多项式相等。

证明：n+1个点确定一个次数小于等于n的多项式。

分析：设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，且 $f(x_i)=y_i$（$i=1,2,\cdots,n+1$），

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 两两不同，则

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$$

证明：设 $f(x)$ 为 n 次复系数多项式，若存在两两不同的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 使得 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_{n+1})$ 为实数，则 $f(x)$ 为实系数多项式。

分析：设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，则

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \\ f(x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \\ f(x_{n+1}) \end{pmatrix}$$

问：设 $f(x)$ 为 n 次复系数多项式，若存在两两不同的有理数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 使得 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_{n+1})$ 为有理数，则 $f(x)$ 为有理系数多项式？

问：设 $f(x)$ 为 n 次复系数多项式，若存在两两不同的整数 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 使得 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_{n+1})$ 为整数，则 $f(x)$ 为整系数多项式？

证明：设$V_1,V_2,\cdots,V_m$是数域F上线性空间V的真子空间，则存在$\alpha\in V$使得$\alpha\notin V_i$（$i=1,2,\cdots,m$）。

分析：即证$V\neq\bigcup_{i=1}^{m}V_i$。

证：设$V=\bigcup_{i=1}^{m}V_i$。因为V_i是V的真子空间，则存在$\alpha_i\in V$且$\alpha_i\notin V_i$（$i=1,2,\cdots,m$）。对任意$t\in F$，构造向量$\beta_t=\alpha_1+t\alpha_2+t^2\alpha_3\cdots+t^{m-1}\alpha_m\in V$。

由抽屉原理，存在两两不同的数 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 及 $k\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得 $\beta_{t_1},\beta_{t_2},\cdots,\beta_{t_m}\in V_k$，即有

$$\begin{pmatrix}\beta_{t_1}\\ \beta_{t_2}\\ \vdots\\ \beta_{t_m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{m-1}\\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_1^{m-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & t_{m-1} & t_{m-1}^2 & \cdots & t_{m-1}^{m-1}\\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^{m-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}。$$

因为$t_1,t_2,\cdots,t_m$两两不同，所以矩阵$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{m-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_{m-1} & t_{m-1}^2 & \cdots & t_{m-1}^{m-1} \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^{m-1} \end{pmatrix}$可逆，从而

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{m-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_1^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_{m-1} & t_{m-1}^2 & \cdots & t_{m-1}^{m-1} \\ 1 & t_m & t_m^2 & \cdots & t_m^{m-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_{t_1} \\ \beta_{t_2} \\ \vdots \\ \beta_{t_m} \end{pmatrix},$$

即$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$可由$\beta_{t_1},\cdots,\beta_{t_m}$表出。

因为$\beta_{t_1},\beta_{t_2},\cdots,\beta_{t_m}\in V_k$且$V_k$是$V$的子空间，所以$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in V_k$，特别地，$\alpha_k\in V_k$，矛盾。故$V\neq\bigcup_{i=1}^{m}V_i$。所以存在$\alpha\in V$使得$\alpha\notin V_i$（$i=1,2,\cdots,m$）。

证：设 $f_1,\cdots,f_m$ 是线性空间 V 上的两两不同的线性泛函，则存在 $\alpha\in V$ 使得 $f_1(\alpha),\cdots,f_m(\alpha)$ 两两不同。

分析：令 $V_{ij}=\{\alpha\in V \mid f_i(\alpha)=f_j(\alpha)\}$（$1\le i<j\le m$）。易知 V_{ij} 是 V 的真子空间（$1\le i<j\le m$）。

证：设 f 是线性空间 V 上的线性变换，α_i 是 f 的属于特征值 λ_i 的特征向量（$i=1,2,\cdots,m$），若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 两两不同，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

证明：设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则 $f^i(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)=0$，即有

$k_1\lambda_1^i\alpha_1+k_2\lambda_2^i\alpha_2+\cdots+k_m\lambda_m^i\alpha_m=0$（$i=1,2,\cdots,m-1$），于是

$$(k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,\cdots,k_m\alpha_m)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}=0$$

因为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 两两不同，所以 $\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}$ 可逆，从而

$(k_1\alpha_1,\cdots,k_m\alpha_m)=0$，即 $k_i\alpha_i=0$。

因为 $\alpha_i \neq 0$，所以 $k_i=0$（$i=1,2,\cdots,m$），从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关。

证：设 f 是有限维线性空间 V 上的线性变换，W 是 f 的不变子空间。若 f 在 V 上可对角化，则 f 在 W 上也可对角化。

证：设 $V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_m}$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 为 f 的所有不同的特征值。设 $w\in W\subset V$，则存在 $v_i\in V_{\lambda_i}$（$i=1,2,\cdots,m$）使得 $w=v_1+v_2+\cdots+v_m$，于是

$f^i(w)=\lambda_1^i v_1+\lambda_2^i v_2+\cdots+\lambda_m^i v_m$（$i=1,2,\cdots,m-1$），即有

$$(v_1,v_2,\cdots,v_m)\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}=(w,f(w),\cdots,f^{m-1}(w))$$

因为$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$两两不同，所以$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}$可逆，从而

$$(v_1,v_2,\cdots,v_m)=(w,f(w),\cdots,f^{m-1}(w))\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

即$v_1,v_2,\cdots,v_m$可由$w,f(w),\cdots,f^{m-1}(w)$表出。

因为 W 是 f 的不变子空间，所以 $w, f(w), \cdots, f^{m-1}(w) \in W$，从而 $v_1, v_2, \cdots, v_m \in W$，即 $v_i \in W \cap V_{\lambda_i}$（$i = 1,2,\cdots,m$）。故 $W = (W \cap V_{\lambda_1}) + (W \cap V_{\lambda_2}) + \cdots + (W \cap V_{\lambda_m})$。

因为 $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_m}$ 是直和，所以 $(W \cap V_{\lambda_1}) + (W \cap V_{\lambda_2}) + \cdots + (W \cap V_{\lambda_m})$ 是直和，于是 $W = (W \cap V_{\lambda_1}) \oplus (W \cap V_{\lambda_2}) \oplus \cdots \oplus (W \cap V_{\lambda_m})$。故 f 在 W 上也可对角化。

证：设 f,g 是有限维线性空间 V 上的线性变换且 $fg=gf$。若 f,g 都可对角化，则 f,g 可同时对角化。

分析：设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 为 f 的所有不同特征值，V_{λ_i} 是 f 的属于特征值 λ_i 的特征子空间（$i=1,2,\cdots,s$）；$\mu_1,\cdots,\mu_t$ 为 g 的所有不同特征值，W_{μ_j} 是 g 的属于特征值 μ_j 的特征子空间（$j=1,2,\cdots,t$）。

因为 f,g 都可对角化，所以 $V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}=W_{\mu_1}\oplus\cdots\oplus W_{\mu_t}$。

由 $fg=gf$ 易得 W_{μ_j} 是 f 的不变子空间，从而

$$V=(\bigoplus_{i=1}^{s}(W_{\mu_1}\cap V_{\lambda_i}))\oplus(\bigoplus_{i=1}^{s}(W_{\mu_2}\cap V_{\lambda_i}))\oplus\cdots\oplus(\bigoplus_{i=1}^{s}(W_{\mu_t}\cap V_{\lambda_i}))。$$

所以 f,g 可同时对角化。